Tema 5: Cinemática. Dinámica de los motores alternativos. Equilibrado de motores.

Cinemática

Parte de la mecánica que estudia el movimiento prescindiendo de las fuerzas que lo producen.

5.1. Movimiento del pistón.

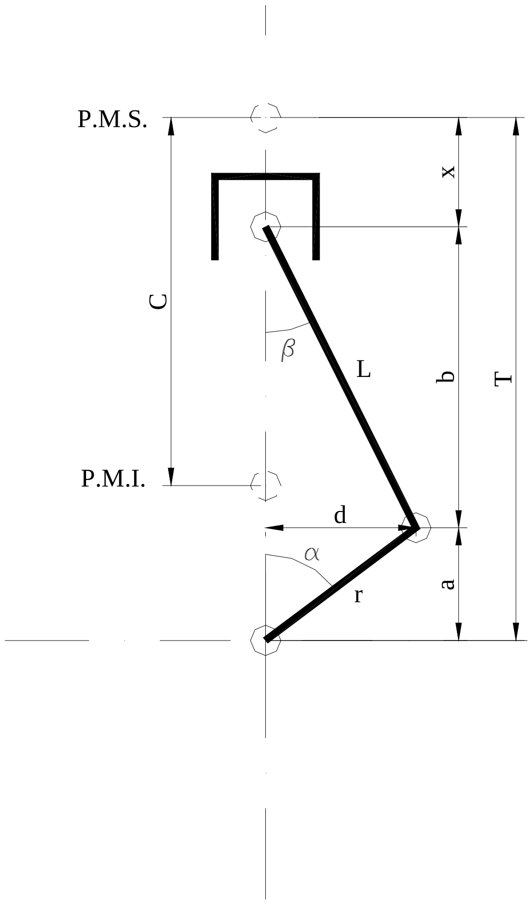
El *pie de biela* al ir unido con el pistón, está sometido a un movimiento rectilíneo alterno.

La *cabeza de biela* describe un movimiento circular.

Para los efectos de cálculo, el movimiento circular de la manivela se considera uniforme, sin error apreciable.

- L : longitud de biela.
- r : radio de la manivela.
- C : carrera del pistón.
- x : deslizamiento del pistón referido al punto muerto superior e inferior.
- α : desplazamiento angular de la manivela respecto al punto muerto superior.
- β : ángulo que forma el eje de la biela con el eje del cilindro.

Tenemos que hallar la velocidad y aceleración del pistón. Para ello hay que determinar la relación que hay entre $\boxed{x}$ y $\boxed{\alpha}$.



$$\cos\alpha = \frac{a}{r};\ a = r\cdot\cos\alpha$$

$$\cos\beta = \frac{b}{L};\ b = L\cdot\cos\beta$$

$$x + a + b = T = L + r$$

$$x + r\cdot\cos\alpha + L\cdot\cos\beta = L + r$$

$$x = r - r\cdot\cos\alpha + L - L\cdot\cos\beta$$

$$\boxed{x = r\cdot\left(1-\cos\alpha\right) + L\cdot\left(1-\cos\beta\right)}\quad (1)$$

Vamos a expresar x sólo en función de α :

$$sen\alpha = \frac{d}{r};\ sen\beta = \frac{d}{L};$$

$$r\cdot sen\alpha = L\cdot sen\beta\ ;\ sen\beta = \frac{r\cdot sen\alpha}{L}$$

haciendo $\lambda = \dfrac{r}{L};\ \Rightarrow sen\beta = \lambda\cdot sen\alpha$

Cuando $\alpha = 90^{\circ} \Rightarrow\ sen\alpha = 1$; β =máx. $\Rightarrow\ sen\beta = \lambda\cdot 1 = \lambda$ (inclinación de la biela).

$\cos\beta = \sqrt{1 - sen^2\beta} = \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot sen^2\alpha}$ sustituyendo en (1)

$x = r \cdot (1 - \cos\alpha) + L \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot sen^2\alpha}\right)$

Como $\lambda = \dfrac{r}{L}$, si $L \to \infty \;\Rightarrow\; \lambda = 0$, como $sen\beta = \lambda$, $sen\beta = 0 \;\Rightarrow\; sen0^{o} = 0 \Rightarrow\; \beta = 0$ la biela se desplazaría manteniéndose siempre paralela a sí misma.

$x = r \cdot (1 - \cos\alpha) + L \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot sen^2\alpha}\right)$, sustituyendo $\lambda = 0$,

$x = r \cdot (1 - \cos\alpha) + L \cdot \left(1 - \sqrt{1 - 0}\right)$; $x = r \cdot (1 - \cos\alpha) + L \cdot (1 - 1)$; $x = r \cdot (1 - \cos\alpha) + L \cdot 0$

$\boxed{x = r \cdot (1 - \cos\alpha)}$ Para $\lambda = 0 \Rightarrow \beta = 0$

Para ver cómo varían los deslizamientos del pistón en función del ángulo de la manivela, habrá que trazar un diagrama e ir aplicando valores en la fórmula (1) de la página 1, para unos determinados valores de $\boxed{r}$ y $\boxed{L}$ (diseño biela-manivela). En el diagrama se podría observar que para un movimiento angular de la manivela $\alpha = 90^{o}$, el pistón recorre un trayecto superior a la mitad de la carrera. Esto significa que para recorrer la primera mitad de la carrera invierte un tiempo menor que para recorrer la segunda mitad.

5.2. Velocidad del pistón.

La velocidad del pistón no es uniforme. En un determinado instante, recorriendo el pistón una parte infinitesimal de carrera $\boxed{dx}$ en un tiempo infinitesimal $\boxed{dt}$, la velocidad está dada por

$V = \dfrac{dx}{dt}$, es decir, la derivada respecto al tiempo de : $x = r \cdot (1 - \cos\alpha) + L \cdot (1 - \cos\beta)$;

$x = r \cdot (1 - \cos\alpha) + L \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot sen^2\alpha}\right)$; como $\lambda = \dfrac{r}{L}$; $L = \dfrac{r}{\lambda}$;

$x = r \cdot \left[(1 - \cos\alpha) + \dfrac{1}{\lambda} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot sen^2\alpha}\right)\right]$; derivando $V = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{d\alpha} \cdot \dfrac{d\alpha}{dt}$

$$V = r \cdot \left(sen\alpha + \frac{1}{\lambda} \cdot \left[-\left(\frac{-2 \cdot \lambda^2 \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha}{2 \cdot \sqrt{1 - \lambda^2 \cdot sen^2\alpha}} \right) \right] \right) \cdot \frac{d\alpha}{dt}$$

$V = r \cdot \left(sen\alpha + \dfrac{1}{\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^2 \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha}{\sqrt{1 - \lambda^2 sen^2\alpha}} \right) \cdot \omega$; siendo ω la velocidad angular del pistón en $\dfrac{rad}{sg}$.

Como $\lambda^2 \cdot sen^2\alpha$ es un valor muy pequeño, despreciándolo:

$V = \omega \cdot r \cdot (sen\alpha + \lambda \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha)$; como $sen\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{sen2\alpha}{2}$

$V = \omega \cdot r \cdot \left(sen\alpha + \dfrac{\lambda}{2} \cdot sen2\alpha \right)$, como $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi \cdot n}{60}$; $V = \dfrac{\pi \cdot n}{30} \cdot r \cdot \left(sen\alpha + \dfrac{\lambda}{2} \cdot sen2\alpha \right)$;

si expresamos $\boxed{r}$ y $\boxed{L}$ en milímetros y $\boxed{V}$ en $\dfrac{m}{sg}$; $V = \dfrac{\pi \cdot n}{30000} \cdot r \cdot \left(sen\alpha + \dfrac{\lambda}{2} \cdot sen2\alpha \right)$;

Un índice fundamental para conocer las condiciones de funcionamiento de los motores es la ***velocidad media del pistón***. Para cada giro de la manivela, el pistón recorre un espacio igual a dos veces la carrera; si $\boxed{n}$ es el número de revoluciones del motor, la velocidad media del pistón está dada por: $V_m = \dfrac{2 \cdot C \cdot n}{60} = \dfrac{C \cdot n}{30}$;

Índice de saturación de un motor.

Índice de saturación= Pme x Vmpistón.

Algunos ejemplos de motores de Fórmula 1 (años 90):

Motor DFR(Cosworth): Vm= 25,5 m/sg; Pme=13,75 kg/cm$^2 \Rightarrow$ I. de S.= 350,7

Ferrari: Vm=21,9 m/sg; Pme=12,78 Kg/cm^2 $\Rightarrow$ I. de S.= 280

Honda: Vm=22,4 m/sg; Pme=12,94 Kg/cm^2 $\Rightarrow$ I. de S.= 290

5.3. Aceleración del pistón.

Como la velocidad del pistón varía durante el ciclo, las masas dotadas de movimiento alterno están sometidas a una aceleración $\boxed{a}$ cuyo valor está dado por la derivada de la velocidad respecto al tiempo:

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt}$; como $V = \omega \cdot r \cdot \left(sen\alpha + \frac{\lambda}{2} \cdot sen2\alpha \right)$

$\frac{dv}{d\alpha} = \omega \cdot r \cdot \left(\cos\alpha + \frac{\lambda}{2} \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha \right) = \omega \cdot r \cdot (\cos\alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha)$, de donde

$\boxed{a} = \frac{dv}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega \cdot r \cdot (\cos\alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha) \cdot \omega = \boxed{\omega^2 \cdot r \cdot (\cos\alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha)}$ (2)

Para el caso de *biela de longitud infinita* $L = \infty \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow a = \omega^2 \cdot r \cdot \cos\alpha$

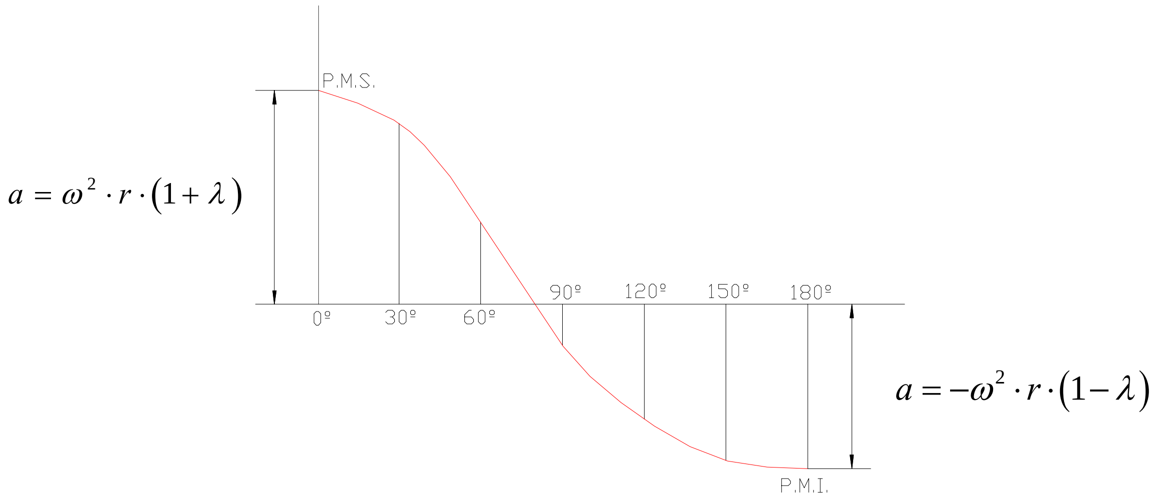
La aceleración tendrá su *máximo valor positivo* correspondiendo al P.M.S. $(\alpha = 0^o)$, ya que $\cos\alpha = \cos 0^o = 1$; $\cos 2\alpha = \cos 2 \cdot 0^o = \cos 0 = 1$; sustituyendo en (2)

$a = \omega^2 \cdot r \cdot (1 + \lambda)$

La aceleración tendrá su *valor máximo negativo* correspondiendo al P.M.I. $(\alpha = 180^o)$, ya que $\cos\alpha = \cos 180^o = -1$; $\cos 2\alpha = \cos 2 \cdot 180^o = \cos 360^o = \cos 0^o = 1$; sustituyendo en (2)

$a = \omega^2 \cdot r \cdot (-1 + \lambda \cdot 1) \Rightarrow a = -\omega^2 \cdot r \cdot (1 - \lambda)$

El valor de la aceleración se anula cuando es máxima la velocidad del pistón.



Esta figura representa el diagrama de la aceleración, en función de los ángulos de rotación de la manivela, durante media revolución de la misma.

Dinámica

Parte de la mecánica que trata de las leyes del movimiento en relación con las fuerzas que lo producen.

5.4. Masas dotadas de movimiento alterno y masas circulares.

Las partes dotadas de movimiento alterno están sometidas a fuerzas de inercia calculables por medio de la fórmula general $F = -m_a \cdot a$, donde m_a es la masa y a la aceleración, mientras que las partes unidas a la manivela y que giran con ella, están sometidas a la fuerza centrífuga expresada por $F_c = m_c \cdot \omega^2 \cdot r$,en donde ω es la velocidad angular.

Tenemos que determinar cuáles son las partes del motor dotadas de movimiento alterno y cuáles las de movimiento circular.

No existe duda en cuanto se refiere al pistón y a las partes a él directamente unidas, pero no ocurre lo mismo en lo que respecta a la biela. Ésta se une, por una extremidad, con el pistón y por la otra con el perno de la manivela. En ambas lleva montados cojinetes que, con relación del peso, se consideran como parte integrante de la biela. La extremidad unida al pistón (pie de biela) participa de su movimiento alterno, mientras que la que se une al eje (cabeza de biela) participa del movimiento circular del mismo.

Por lo que respecta a la caña de la biela, es buena norma, en el caso de bielas corrientes, englobar un tercio de su peso con la cabeza y los otros dos tercios con el pie, despreciando el par de inercia de la biela.

Se consideran, por tanto, *concentradas sobre el eje del perno del pistón y dotadas de movimiento alterno*, las masas de las siguientes partes:

1. Pistón completo con sus aros.
2. Perno del pistón y partes anexas.
3. Pie de biela y dos tercios de la caña.
4. Vástago y cruceta (en su caso).

Se consideran *concentradas sobre el eje del perno de la manivela y dotadas de movimiento circular* las masas de las siguientes partes:

1. Perno de la manivela.
2. Cabeza de la biela completa y un tercio de la caña.

Hay que considerar también como partes generadoras de fuerza centrífuga los brazos de la manivela y sus contrapesos; para comodidad del cálculo pueden éstas considerarse también concentradas sobre el eje del perno de la manivela.

Las *fuerzas alternas*, estando constantemente dirigidas según el peso del cilindro, actúan sobre la manivela en forma análoga a como lo efectúan las presiones del gas e intervienen modificando la acción de éste; por eso serán tomadas en consideración en el estudio que se hará para la justa determinación de los valores instantáneos de la carga sobre los cojinetes de biela y de bancada, así como del par motor.

Por el contrario, las *fuerzas centrífugas*, como quiera que pasan constantemente por el centro de rotación, no influyen sobre el valor del par motor.

Para los *efectos del cálculo, cada fuerza, centrífuga o alterna, debe ser evidentemente aplicada a la masa que la genera*; así, sobre el *perno del pistón* actúa tan sólo la *fuerza alterna* del mismo; sobre el *cojinete de cabeza de biela* ejercen su acción todas las *fuerzas alternas*, la *fuerza centrífuga* generada por *la cabeza de biela y un tercio de su caña* y sobre el cojinete de bancada, todas las fuerzas, tanto *las alternas como las centrífugas*.

5.5. Fuerzas alternas de inercia.

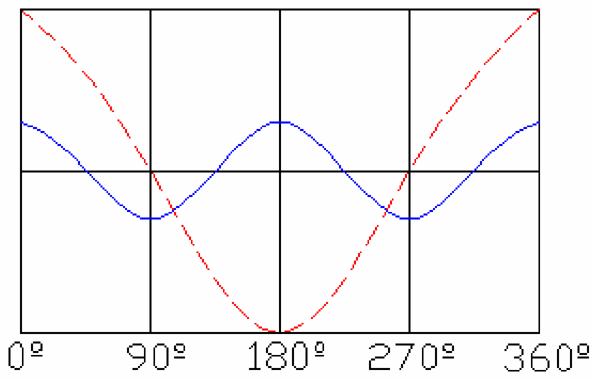
En la relación general $F_a = -m_a \cdot a$, sustituyendo a por la expresión

$$a = \omega^2 \cdot r \cdot (\cos\alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha)\,; \quad F_a = -m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot (\cos\alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha)$$

En la expresión anterior, si trazamos las curvas del primer y segundo término del paréntesis, veremos cómo el segundo término tiene una frecuencia doble del primero, lo cual significa que en un determinado tiempo adquiere el valor cero y su valor máximo un número de veces doble del correspondiente al primer término.

La expresión $m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos\alpha$, representa la *fuerza alterna de inercia de primer orden* y equivale a toda la fuerza de inercia en el caso imaginario de la biela de longitud infinita (ver página 3 de estos apuntes).

El segundo término $m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \lambda \cdot \cos 2\alpha$, constituye la *fuerza alterna de inercia de segundo orden*, y es igual a cero en el caso imaginario de biela con longitud infinita.



- - - - - - - Fuerza alterna de inercia de primer orden.

——— Fuerza alterna de inercia de segundo orden.

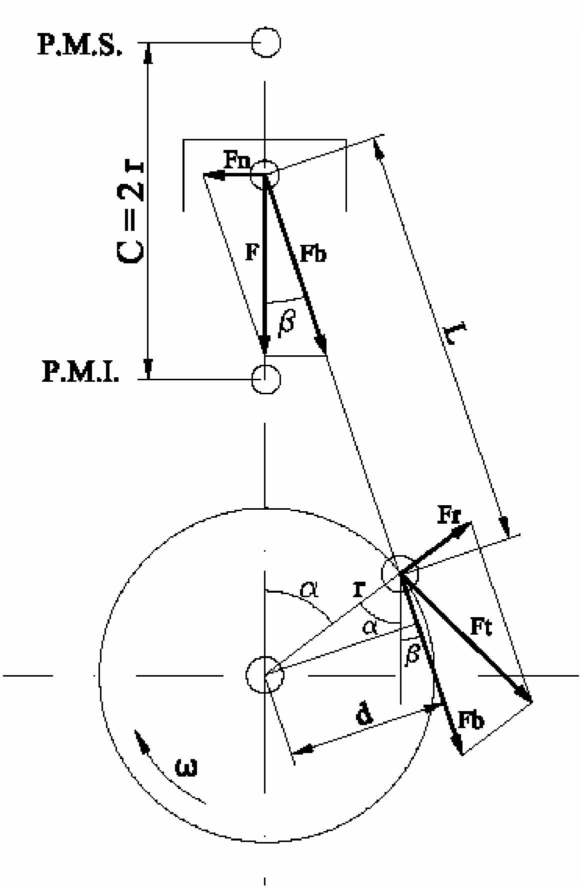
Las fuerzas alternas de inercia son las causas más importantes de vibraciones, y veremos cómo su efecto nocivo puede ser neutralizado en parte o totalmente.

A *regímenes medios* comienzan a ser sensibles las fuerzas de inercia, reduciendo ligeramente las solicitaciones debidas a las presiones máximas del ciclo.

A *elevada velocidad* (altos regímenes) las fuerzas de inercia adquieren siempre mayor importancia, regularizando el diagrama resultante y haciendo bajar el valor de la carga máxima sobre los cojinetes, pero aumentando notablemente la carga media.

En los motores de grandes dimensiones cuyas partes dotadas de movimiento alterno son notablemente pesadas, la velocidad de rotación no puede alcanzar valores muy elevados, y en los motores rápidos, el peso de las masas alternas debe ser tanto menor cuanto más elevado sea el régimen compatible con las solicitaciones del material.

5.6. Par motor.



La fuerza resultante F que actúa sobre el pistón, suma de la alterna de inercia Fa y de la correspondiente a la presión del gas Fg, está equilibrada por la reacción de la biela y de las paredes del cilindro; por tanto, ejerce sobre la biela una fuerza Fb dirigida según su eje, sobre la muñequilla del codo del cigüeñal. Su intensidad es $Fb = \dfrac{F}{\cos\beta}$; $\cos\beta = \dfrac{F}{Fb}$;

y sobre las paredes del cilindro actúa una fuerza normal a la misma y cuya intensidad es $tg\beta = \dfrac{Fn}{F}$; $Fn = F \cdot tg\beta$.

La fuerza normal Fn es mayor cuanto más abierto sea el ángulo β, es, evidentemente, la causa de la perdida de potencia por rozamiento del pistón entre las paredes del cilindro.

La fuerza Fb es ejercida por la biela sobre la muñequilla del codo del cigüeñal, y por tanto, sobre el eje del cigüeñal, respecto a cuyo eje de rotación tiene un brazo $d = r \cdot sen(\alpha+\beta)$, ya que el $sen(\alpha+\beta) = \dfrac{d}{r}$, lo cual da origen al momento motor Mt, de intensidad $Mt = Fb \cdot d$, que, sustituyendo…

$$Mt = \frac{F}{\cos\beta} \cdot r \cdot sen(\alpha+\beta) = F \cdot r \cdot \left[\frac{sen\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot sen\beta}{\cos\beta}\right] = F \cdot r \cdot \left[sen\alpha + \cos\alpha \cdot \frac{sen\beta}{\cos\beta}\right]$$

recordando que $sen\beta = \lambda \cdot sen\alpha$; $\cos\beta = \sqrt{1-\lambda^2 \cdot sen^2\alpha}$ (página 1 y 2 de los apuntes),

$Mt = F \cdot r \cdot \left[sen\alpha + \dfrac{\lambda \cdot sen\alpha \cdot \cos\alpha}{\sqrt{1-\lambda^2 \cdot sen^2\alpha}}\right]$; despreciando $\lambda^2 \cdot sen^2\alpha$; $\boxed{Mt = F \cdot r \cdot \left[sen\alpha + \dfrac{\lambda}{2} sen2\alpha\right]}$

Al mismo valor del momento motor se llega descomponiendo la fuerza Fb en una componente radial Fr, y en una tangencial Ft, la primera de las cuales no contribuye al par motor, mientras que la segunda actúa con un brazo de valor constante r; por ello el par motor vale $Mt = Ft \cdot r$.

De la figura obtenemos: $sen(\alpha+\beta) = \dfrac{Ft}{Fb}$; $Ft = Fb \cdot sen(\alpha+\beta)$, sustituyendo, resulta: $Mt = Fb \cdot r \cdot sen(\alpha+\beta)$, que es la misma fórmula hallada anteriormente.

Realizando la construcción gráfica de la figura de la página 6 de los apuntes, para un motor monocilíndrico de cuatro tiempos se ve claramente su forma pulsante (puesto ya en evidencia, por la expresión analítica correspondiente), que puede ser causa de irregularidad de marcha y vibraciones.

5.7. Reparto de los ciclos en los motores pluricilíndricos.

En el caso de los motores de varios cilindros, para regularizar al máximo el par motor y hacer, por tanto, más uniforme el movimiento del eje de cigüeñal y más ordenada la marcha del motor, se procura que los ciclos de los diversos cilindros se sucedan con iguales intervalos angulares. Esto se obtiene desfasando entre sí las muñequillas del cigüeñal, de manera que las correspondientes a dos ciclos sucesivos se encuentren desfasadas en un ángulo que está dado en grado por la siguiente relación: $\theta = 180 \cdot \frac{h}{i}$, siendo h : nº de tiempos, i :nº de cilindros.

En el caso de motores de cuatro tiempos, para un motor de 2 cilindros: $\theta = 360^o$; de 4 cilindros: $\theta = 180^o$; de 8 cilindros: $\theta = 90^o$.

Resultando, por tanto, comprensible la ventaja que se obtiene al aumentar el número de cilindros, considerando que es siempre menor la diferencia entre la ordenada máxima y la media del par motor.

La relación entre los valores máximo y mínimo del par motor es un índice del grado de irregularidad del motor.

5.8. El volante.

Siendo el par motor variable, en los intervalos de tiempo durante los cuales es superior al resistente, el exceso de trabajo motor es acumulado por el sistema en rotación bajo forma de energía cinética y la velocidad de rotación asciende hasta un valor máximo; mientras que en los intervalos durante los cuales el par motor es inferior al resistente, el exceso de trabajo resistente es compensado por el sistema en rotación, a expensas de una disminución de su energía cinética, y entonces la velocidad de rotación desciende hasta un valor mínimo.

Indicando con J el momento de inercia de las masas en rotación; con ω_2 el valor máximo de la velocidad angular y con ω_1, el mínimo, la máxima variación de energía cinética del sistema vale: $\Delta E = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)$; haciendo $\omega = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$; y considerando su <u>*grado de irregularidad*</u> $\boxed{\delta}$, como $\delta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega}$; $\Delta E = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \left(\omega_2 + \omega_1\right) \cdot \left(\omega_2 - \omega_1\right)$;

$$\Delta E = J \cdot \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \cdot \left(\omega_2 - \omega_1\right) \text{; y como } \omega_2 - \omega_1 = \delta \cdot \omega \text{; } \Delta E = J \cdot \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} \cdot \delta \cdot \omega = J \cdot \omega^2 \cdot \delta \text{;}$$

$$\boxed{\delta = \frac{\Delta E}{J \cdot \omega^2}}$$

Como la variación ΔE de energía cinética del sistema es igual a la diferencia entre el trabajo motor y el resistente, su valor es tanto mayor cuanto mayor es el grado de irregularidad del par motor (y por tanto, cuanto menor es el número de cilindros del motor) y cuanto mayor es el valor medio del par motor del mismo.

Para mantener el valor del grado de irregularidad δ entre los límites aceptables, que dependen del género de trabajo que el motor debe realizar, es necesario asignar un valor oportuno al momento de inercia J del sistema de rotación, el cual se obtiene por medio del volante.

En motores rápidos $\delta \approx \frac{1}{10}$ para n= 400 a 800 r.p.m.

En motores lentos $\delta \approx \frac{1}{15}$ a $\frac{1}{30}$ para n= 50 a 110 r.p.m.

En el dimensionamiento del volante intervienen muchos factores, que dependen de las condiciones de empleo y del tipo de motor, como, por ejemplo, las condiciones de arranque, de marcha al mínimo y los períodos de aceleración; con respecto a estos factores la solución más satisfactoria es, por lo general, una solución de compromiso.

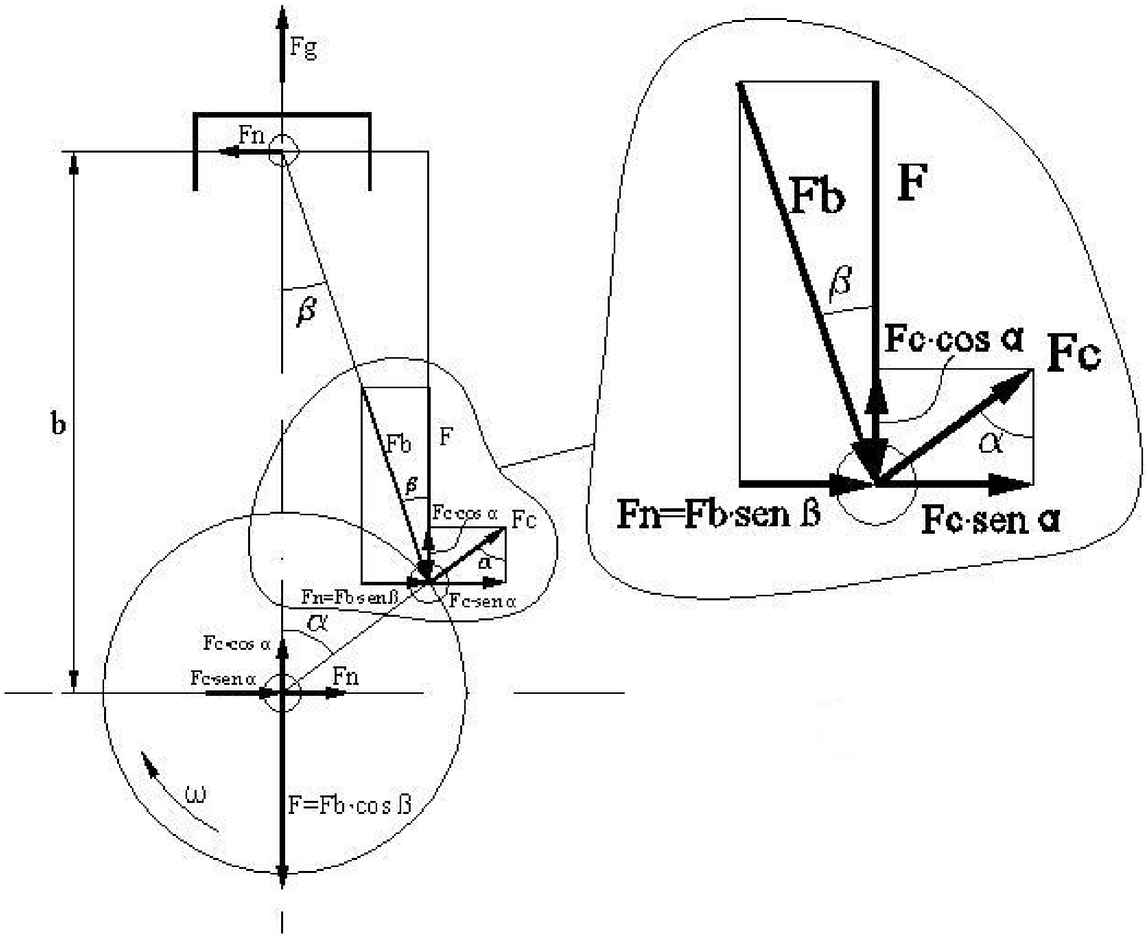
El arranque del motor se facilita con un volante de gran momento de inercia, porque el mismo acumula en la primera fase útil mayor energía para superar rápidamente las fases

pasivas que preceden a la combustión siguiente, sobre todo teniendo en cuenta que la velocidad angular alcanzable en este período no es muy elevada. Por el contrario, para asegurar una aceleración rápida, es necesario reducir al mínimo la inercia de las masas en movimiento. A este respecto, hay que tener en cuenta la inercia de todas las masas unidas al eje motor: se recurre, de ordinario, a un coeficiente empírico de incremento.
Un motor relativamente lento tiene en general, en igualdad de condiciones, una masa volánica mayor, porque el régimen medio de rotación es menor.
Además, cuanto mayor es el número de cilindros, tanto menor puede ser la masa volánica, gracias a las menores fluctuaciones del par motor.
Igualando a 100 el momento de inercia del volante de un motor monocilíndrico, a igual grado de irregularidad y de régimen, los valores en tanto por ciento correspondientes para motores pluricilíndricos serían los siguientes:

2 cilindros .... 80 %
4 cilindros .... 44 %
6 cilindros .... 22 %
8 cilindros .... 11 %
12 cilindros .... 4 %

Equilibrado de motores

5.9. Acciones internas sobre la estructura del motor. Par de reacción.



$tg\beta = \dfrac{Fn}{F}; Fn = F \cdot tg\beta;\ \cos\beta = \dfrac{F}{Fb}; Fb = \dfrac{F}{\cos\beta}; sen\beta = \dfrac{Fn}{Fb}; Fn = Fb \cdot sen\beta$,

y sustituyendo Fb en la fórmula anterior: $Fn = \dfrac{F}{\cos\beta} \cdot sen\beta = F \cdot tg\beta$ y haciendo $\Sigma Fy \Rightarrow Fg - F + Fc \cdot \cos\alpha$, haciendo $F - Fg = Fa \Rightarrow \underline{-Fa + Fc \cdot \cos\alpha}$ (Fuerza según el eje del cilindro).

Haciendo $\Sigma Fx \Rightarrow -Fn + Fn + Fc \cdot sen\alpha = \underline{Fc \cdot sen\alpha}$ (Fuerza perpendicular al eje del cilindro y hacia la derecha).

Además existe un par que actúa alrededor del eje motor, de sentido contrario a la marcha y de una intensidad equivalente a $Fn \cdot b$.

De las fórmulas anteriores se deduce que la componente a lo largo del eje del cilindro depende de la fuerza de inercia alterna y centrífuga; mientras que la componente perpendicular al eje del cilindro depende sólo de la fuerza de inercia centrífuga.

El par que actúa alrededor del eje motor toma el nombre de *PAR DE REACCIÓN* y es exactamente igual y contrario al par motor:

$$b = L\cdot\cos\beta + r\cdot\cos\alpha = \frac{r}{\lambda}\cdot\cos\beta + r\cdot\cos\alpha = r\cdot\left[\frac{1}{\lambda}\cdot\cos\beta + \cos\alpha\right]$$ (ver figura página 6)

$$Fn\cdot b = F\cdot tg\beta\cdot r\cdot\left[\frac{1}{\lambda}\cdot\cos\beta + \cos\alpha\right] = F\cdot r\left[\frac{1}{\lambda}\cdot sen\beta + \cos\alpha\cdot\frac{sen\beta}{\cos\beta}\right] =$$

recordando que $sen\beta = \lambda\cdot sen\alpha$; $\cos\beta = \sqrt{1-\lambda^2\cdot sen^2\alpha}$ (página 1 y 2 de los apuntes),

$$= F\cdot r\cdot\left[sen\alpha + \cos\alpha\cdot\frac{\lambda\cdot sen\alpha}{\sqrt{1-\lambda^2\cdot sen^2\alpha}}\right]\approx$$; despreciando $\lambda^2\cdot sen^2\alpha$;

$$\boxed{\approx F.r\left[sen\alpha + \frac{\lambda}{2}sen2\alpha\right]}.$$

resultando el <u>*par de reacción*</u>, por tanto, igual en intensidad, pero de sentido opuesto al del par motor (ver página 6).

Los razonamientos antes expuestos para un motor de un único cilindro, pueden fácilmente aplicarse a motores de cualquier número de cilindros.

En el caso más general, el motor con varios cilindros, estará sometido a una fuerza resultante de componentes, según dos de los tres ejes coordenados, y a un momento resultante de componentes según los tres ejes coordenados.

5.10. Vibraciones del motor.

Como hemos indicado en el párrafo anterior, las fuerzas de inercia, alterna y centrífuga de los órganos en movimiento y las presiones del gas, dan origen a fuerzas y momentos que actúan sobre la estructura del motor y de éste, a través de los soportes, se transmiten al basamento en que descansa el motor.

Puesto que tales fuerzas y momentos son variables en el tiempo, y los soportes y la estructura tienen mayor o menor elasticidad, el motor puede hallarse sometido a un complejo movimiento vibratorio.

El equilibrado del motor tiene por objeto reducir y, si es posible, eliminar tales vibraciones, anulando incluso las causas que las producen, es decir, las fuerzas y momentos aplicados a la estructura del motor.

Se dice, por tanto, que un motor está equilibrado cuando es nula la resultante de tales fuerzas y momentos, excepto el par de reacción resultante, que no es posible, evidentemente, suprimirlo del todo, por cuanto es igual y contrario al par motor generado.

5.11. Equilibrado del cigüeñal.

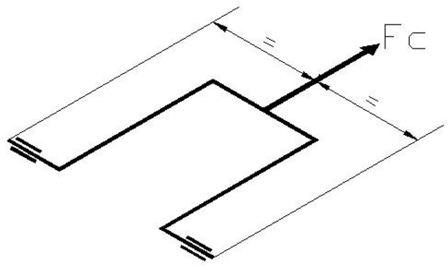
Las vibraciones causadas por las fuerzas y los momentos que se originan de las masas giratorias, se eliminan realizando el equilibrado del eje del cigüeñal.

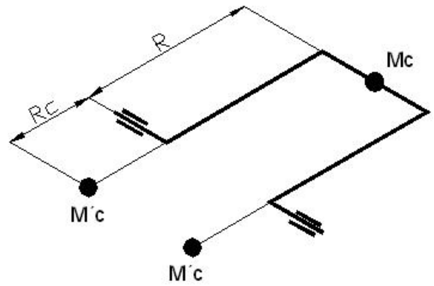
Para que su equilibrio resulte completo, el eje debe ser equilibrado estática y dinámicamente. El equilibrado dinámico puede alcanzarse a condición de haberse efectuado ya el equilibrado estático.

El eje esta *equilibrado estáticamente* cuando es nula la resultante de las fuerzas centrífugas; lo cual se verifica cuando su baricentro se halla sobre el eje de rotación. En estas condiciones, sujeto entre dos puntos situados en el eje, o bien descansando horizontalmente sobre dos soportes de cuña, se mantiene quieto en cualquier posición que sea colocado.

Para los motores de varios cilindros, es regla general disponer las manivelas de forma que se obtenga un desfase uniforme de los ciclos de trabajo, para alcanzar la máxima regularidad posible del par motor. En estas condiciones, en la mayor parte de los casos, la disposición de las manivelas es tal, que queda automáticamente satisfecha también la condición de equilibrio estático, puesto que el eje admite un plano de simetría que pasa por el eje de rotación.

Cuando la resultante no es nula, por ejemplo, el eje de un motor monocilíndrico, se consigue su equilibrado, o sea, que su resultante sea nula, con la ayuda de contrapesos.





En las figuras anteriores, el eje del monocilindro, está sometido a una fuerza centrífuga Fc, aplicada en el centro, que al no ser equilibrada, se transmite íntegramente al basamento. El eje puede estar equilibrado añadiendo dos contrapesos de masa $M'c$ y distancia Rc al eje de rotación, tales que $2 \cdot M'c \cdot Rc = Mc \cdot R$.

El eje está *equilibrado dinámicamente* cuando es nula la resultante de los momentos generados por las fuerzas centrífugas tomados con respecto a un punto cualquiera del eje (por ejemplo, uno de los apoyos).

Durante el desarrollo de un motor puede verificarse que, en relación, al número de tiempos, al número de cilindros y a su respectiva posición, sea posible obtener el *desfase regular entre los ciclos* de los diferentes cilindros con diversas *disposiciones de las manivelas* en el eje. En tal caso, ha de escogerse la disposición que más se aproxime a las condiciones de equilibrio estático y dinámico del eje, cuando resulte imposible alcanzarlas de lleno.

Cuando se construye el eje se regula su equilibrado dinámico con máquinas adecuadas; con ellas se determina la entidad y la posición angular de la masa no balanceada que puede ser consecuencia de las imperfecciones constructivas. Por medio de oportunos retoques (por lo general, abriendo orificios sobres partes cuya resistencia no interesa) se puede conseguir el equilibrado previsto.

Los ejes que tienen un número de manivelas superior a dos, están dinámicamente equilibrados cuando, conseguido el equilibrado estático, admiten un plano de simetría perpendicular al eje de rotación, respecto al cual las manivelas resultan simétricas en número, forma y posición. Todos los demás ejes no están equilibrados, pero puede lograrse que lo estén mediante contrapesos.

Es fácil, por tanto deducir, que el equilibrio perfecto de los ejes que tienen un número de manivelas diferente, de los correspondientes a motores de dos tiempos, de los monocilíndricos y bicilíndricos, tan solo es alcanzado con la ayuda de contrapesos.

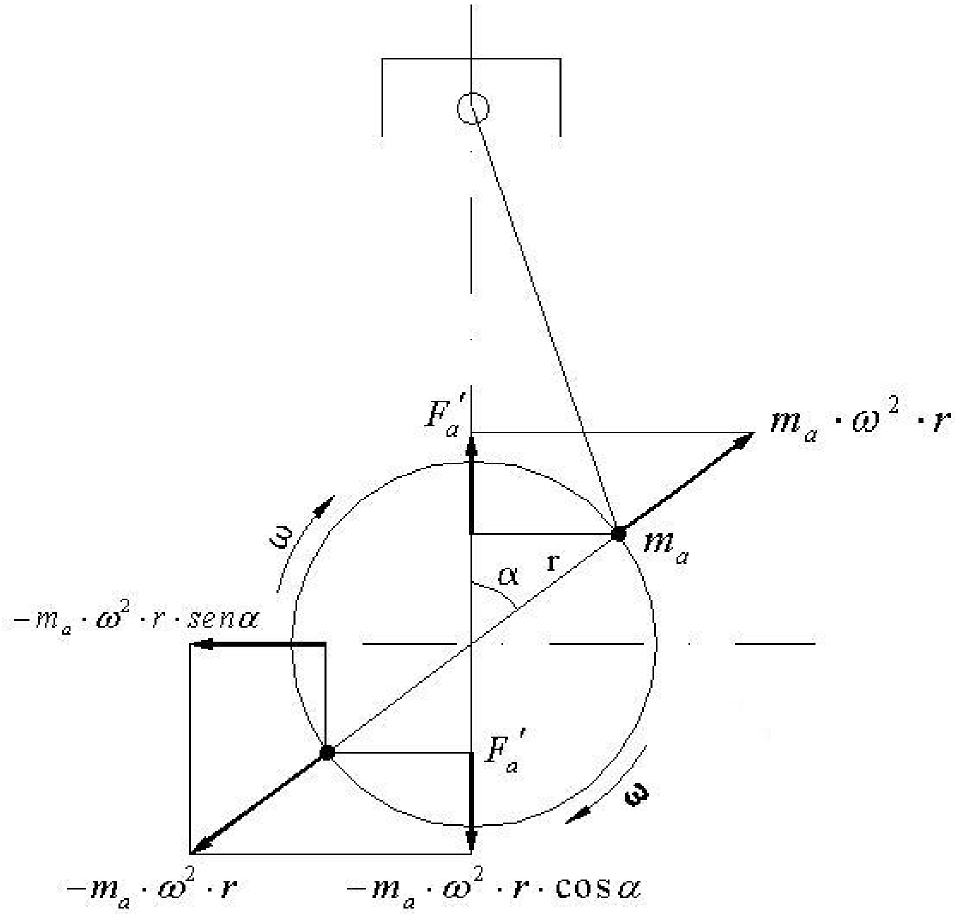
Podemos afirmar que el *equilibrio de las masas rotativas puede conseguirse* con la *oportuna elección de la disposición de las manivelas*, sin olvidar, que debe respetarse la condición de *reparto uniforme de los ciclos* en cada giro y cuando aquélla no es suficiente, *por medio de contrapesos* en cantidad suficiente y en posición adecuada.

Mientras que el equilibrado estático interesa solamente al eje en su totalidad, el dinámico puede considerar y comprender, además, cada una de las cigüeñas en que está el eje idealmente dividido entre soportes.

Casi siempre se obtiene, en efecto, el equilibrio dinámico del eje al anularse las diversas resultantes de los momentos distintos de cero. Esto significa que en las diversas partes que constituyen el eje pueden existir momentos que lo soliciten a flexión, lo cual es impedido por la reacción de los cojinetes de bancada. Por esta razón, los cojinetes están, pues, cargados también por efecto de las solicitaciones centrífugas. Al objeto de eliminar esta carga, es buena norma, en especial para motores rápidos, equilibrar mediante contrapesos cada cigüeña, aunque lo esté el eje en su totalidad.

5.12. Equilibrado de la fuerza alterna de primer orden.

Como hemos visto en la página 5, la fuerza alterna está expresada por la relación $F_a = F_a' + F_a'' = m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \left(\cos\alpha + \lambda \cdot \cos 2\alpha\right)$, y está constantemente dirigida sobre el eje del cilindro.

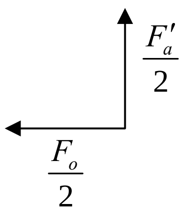


Consideremos un solo cilindro. La fuerza alterna de primer orden $Fa' = m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos\alpha$, (ver página 5), puede ser considerada como la proyección, sobre el eje del cilindro, de una fuerza centrífuga ficticia $m_a \cdot \omega^2 \cdot r$, generada por una masa, m_a, igual a la masa alterna que nos imaginamos concentrada sobre el perno de la manivela.

La fuerza alterna Fa' puede ser equilibrada por la componente vertical de la fuerza centrífuga $-m_a \cdot \omega^2 \cdot r$, producida por una masa de momento estático $m_a \cdot r$, añadida al eje en oposición al botón de la manivela. De esta forma se genera, sin embargo, la fuerza $Fo = -m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot sen\alpha$, la cual está dirigida normalmente al eje del cilindro y posee igual magnitud y la misma pulsación que la fuerza alterna.

El resultado es, en realidad, haber girado 90º la línea de acción de la fuerza alterna, a causa de lo cual las pulsaciones según el eje del cilindro se han transformado en pulsaciones perpendiculares al mismo.

Pero si sobre el eje se añade, en lugar de la masa m_a, una masa igual a $-\frac{m_a}{2}$, se obtiene el equilibrado de la mitad de la fuerza alterna, mientras nace otra fuerza alterna normal al eje del cilindro y de una intensidad más bien igual a la mitad de la que se tendría en sentido vertical sin el contrapeso.



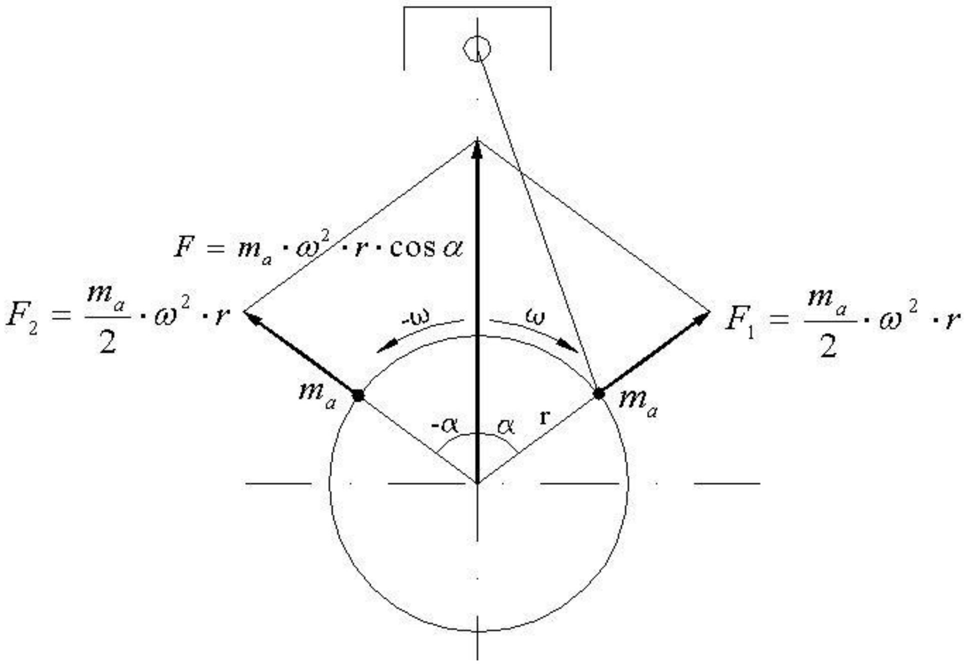
La composición de estas dos fuerzas alternas que actúan según direcciones perpendiculares entre sí, da origen a una fuerza rotativa con velocidad $-\omega$ y de una intensidad equivalente a $\frac{1}{2} \cdot m_a \cdot r$, que es imposible equilibrar.

Éste es el grado máximo de equilibrado de la fuerza alterna de primer orden que se puede alcanzar con el artificio anteriormente descrito y para un motor de un solo cilindro. Para motores de varios cilindros dispuestos en una o más líneas, las fuerzas de primer orden están equilibradas cuando el eje del motor lo está estáticamente (es decir, sin contrapesos). Análogamente, el par debido a la fuerza alterna de primer orden está equilibrado cuando lo está el par debido a la fuerza centrífuga de las masas en rotación, es decir, cuando el eje resulta equilibrado dinámicamente.

5.13. Equilibrado de la fuerza alterna de segundo orden.

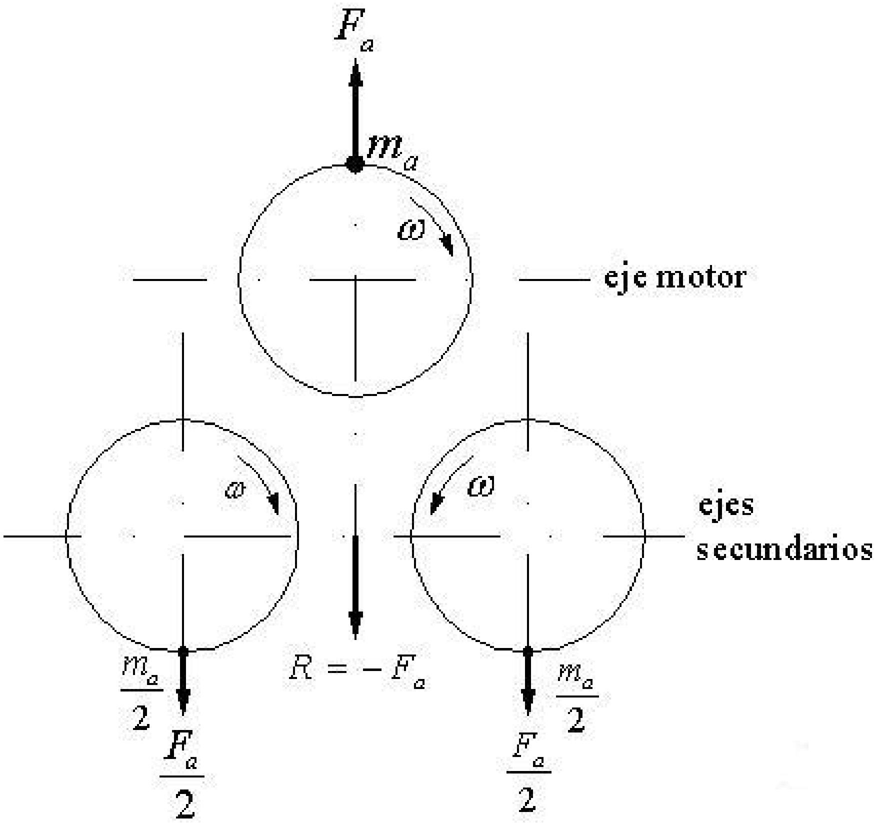
La fuerza alterna de segundo orden, $Fa'' = m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \lambda \cdot \cos 2\alpha$, (ver página 5), puede ser imaginada como la proyección sobre el eje del cilindro de una fuerza centrífuga $m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \lambda$, que siempre forma con el eje un ángulo doble mayor que el descrito por la manivela, puesto que su frecuencia equivale al doble de la fuerza de primer orden.

Conviene tener presente que tanto la fuerza como el par de segundo orden no son en modo alguno equilibrables, ni siquiera parcialmente, con la ayuda de contrapesos sobre el eje del motor, ya que eventuales masas equilibradoras tendrían que girar a velocidad doble del mismo eje. No existe, por tanto, ninguna relación entre el equilibrio del eje y el de la fuerza y par de segundo orden, contrariamente a lo que se verifica para la alterna de primer orden. La importancia de la fuerza alterna de segundo orden, para los efectos de las vibraciones en la estructura del motor, es mucho menor que la de la fuerza de primer orden, dado que las respectivas magnitudes están en la relación λ (con un valor medio de 0,25 a 0,30). En general, un eje es aceptable cuando están satisfechas las condiciones de la regularidad del par motor, del equilibrado de la fuerza y par centrífugo, y del equilibrado de la fuerza alterna de primer orden, así como de su par relativo.



La fuerza alterna de primer orden, $m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos\alpha$, puede también ser considerada como la resultante de dos fuerzas F_1 y F_2 de magnitud $\frac{1}{2} \cdot m_a \cdot \omega^2 \cdot r$, una de las cuales gira simultáneamente con la manivela a la velocidad ω y la otra lo efectúa en sentido opuesto con velocidad $-\omega$. En efecto, la resultante de F_1 y F_2, es $F = m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos\alpha$. Análoga observación es válida para una fuerza alterna de segundo orden; pero la fuerza rotativa debe adquirir el valor $\frac{1}{2} \cdot m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \lambda$, y la velocidad angular, el valor de 2ω y de -2ω.

Se comprende, por tanto, cómo puede ser equilibrada la fuerza alterna de primer orden F_a, generada por una manivela motriz, mediante dos ejes subsidiarios, colocado según muestra la figura,



comprendiendo entre los dos una masa igual a la mitad de m_a que origina la F_a, girando ambos a la misma velocidad, pero en sentido opuesto; así pues, el equilibrado de la fuerza de segundo orden se puede obtener mediante otros dos ejes que llevan dos masas iguales a $\frac{1}{2} \cdot m_a \cdot \lambda$, que giran a las velocidades 2ω y -2ω.

El equilibrado del monocilindro podría también realizarse con la ayuda de dos cilindros opuestos a los del motor, colocados simétricamente a los dos lados de éste y cuyas masas alternas sean iguales a la mitad de las que se han de equilibrar. Pero ello conduce al aumento del número de cilindros y no resulta, por tanto, de ningún interés práctico para un monocilindro. El ejemplo hace más intuitivo el hecho de que el equilibrado de las fuerzas alternas es tanto más fácil cuanto mayor sea el número de cilindros.

5.14. Orden de encendido.

La regularización del par motor, que conduce a un desfase uniforme de las manivelas y el equilibrado dinámico del eje, que implica particulares disposiciones de las manivelas en el eje, obligan a seguir una determinada norma en el encendido sucesivo de los diversos cilindros.

Como para un motor de cuatro tiempos con un cierto número de cilindros son posibles diversos órdenes de encendido, es necesario escoger el más conveniente y adecuado, guiándose, para ello, por estas dos importantes consideraciones:

1. Obtener la mayor uniformidad de carga sobre los cojinetes de bancada, lo cual se consigue alternando, hasta el máximo, los encendidos sobre las diversas manivelas.
2. Procurar, en lo posible, que la aspiración de los cilindros alimentados por un colector común no se obstaculicen recíprocamente causando irregularidades en el llenado de alguno de ellos.

Cuatro cilindros – Cuatro tiempos (en línea)	1-3-4-2 * 1-2-4-3
Seis cilindros – Cuatro tiempos (en línea)	1-5-3-6-2-4 * 1-2-4-6-5-3 1-2-3-6-5-4 1-5-4-6-2-3

En los motores de dos tiempos, una vez dispuestas las manivelas según el equilibrado más conveniente, el orden de encendido posible es siempre uno solo, y es el que resulta después de correr las estrellas de las manivelas en sentido contrario al de rotación del motor.

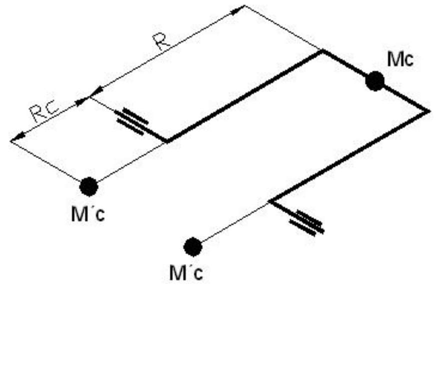
5.15. Estudio del equilibrado del motor en algunos casos particulares.

El orden en que serán realizados los distintos estudios será el siguiente:

1. FUERZAS CENTRÍFUGAS ΣFc : Equilibrado estático del eje.
2. FUERZAS ALTERNAS DE PRIMER ORDEN $\Sigma F'a$: Para motores de una o más filas de cilindros, si existe equilibrio de las ΣFc , se da también el equilibrio de la $\Sigma F'a$, y no es necesario ninguna otra verificación.
3. PAR GENERADO POR LAS FUERZAS CENTRÍFUGAS ΣMc : Equilibrado dinámico del eje.
4. PAR GENERADO POR LAS FUERZAS ALTERNAS DE PRIMER ORDEN $\Sigma M'a$.
5. FUERZAS ALTERNAS DE SEGUNDO ORDEN $\Sigma F''a$.
6. PAR GENERADO POR LAS FUERZAS ALTERNAS DE SEGUNDO ORDEN $\Sigma M''a$.

Los puntos 1. y 3. se refieren al equilibrado estático y dinámico del eje, el resto de los puntos corresponden al equilibrado del conjunto motor.

5.15.1. Motor monocilíndrico de cuatro y dos tiempos.



1. FUERZAS CENTRÍFUGAS ΣFc : El equilibrado de las masas rotativas se realiza añadiendo dos contrapesos iguales de masa $M'c$ en la prolongación de cada uno de los brazos de la manivela. El momento estático de los dos contrapesos $2 \cdot M'_c \cdot r_c$ debe, naturalmente, ser igual y opuesto al momento estático de las masas rotativas $M'_c \cdot r$.

$$2 \cdot M'c \cdot Rc = Mc \cdot R$$

2. y 5. FUERZAS ALTERNAS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN $\Sigma F'a$ y $\Sigma F''a$: Se limita a reducir las vibraciones provocadas por las fuerzas alternas de primer orden con contrapesos, añadidos a los anteriores y con un momento estático mitad del de las masas alternas que se imaginan concentradas en el botón de la manivela. (Ver apartados anteriores 5.12. y 5.13.). De esta forma se reducen los disturbios causados por la transformación de la pulsación vertical en horizontal.

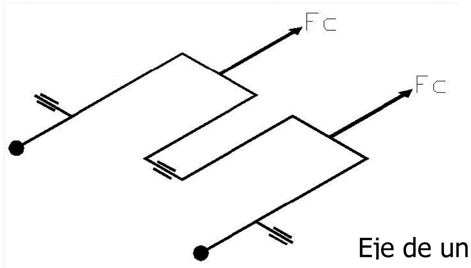
Como estos motores son objeto de un empleo esencialmente modesto y utilitario, no se efectúa el equilibrado total de la $F'a$ y menos aún el de la $F''a$, los cuales son posibles tan solo con el sistema de los ejes subsidiarios (página 14).

3., 4. y 6. PAR GENERADO POR LAS FUERZAS CENTRÍFUGAS Y ALTERNAS DE PRIMER Y SEGUNDO ORDEN ΣMc, $\Sigma M'a$ y $\Sigma M''a$. Evidentemente, son nulas todas ellas.

5.15.2. Motor de dos cilindros en línea y cuatro tiempos.

a) *Cuatro tiempos:* Para tener un desfase uniforme de los ciclos de trabajo, las dos manivelas han de estar a 360º. Con esta disposición, el par de torsión es el más uniforme que se puede obtener de un motor de dos cilindros, pero las masas rotativas y las alternas resultan desequilibradas porque el sistema es, evidentemente, igual al del motor monocilíndrico. El equilibrado se hace, por ello, en forma análoga.

Siendo N en número de cilindros:

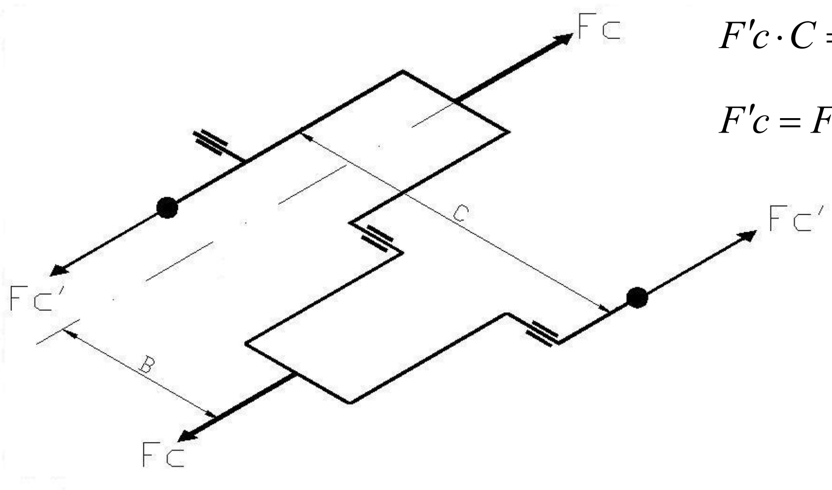


$$\alpha = \frac{720^{\circ}}{N}$$

$$\alpha = \frac{720^{\circ}}{2} = 360^{\circ}$$

Eje de un bicilindro, con manivela a 360º.

b) *Dos tiempos:* La disposición de esta figura se deriva de la anterior, las dos manivelas han de estar a 180º $\alpha = \frac{360^{\circ}}{2} = 180^{\circ}$. En los motores de cuatro tiempos con esta disposición el intervalo entre los ciclos de trabajo no es muy uniforme, puesto que las fases útiles resultan consecutivas; por ello, desde el punto de vista de la variación del par de reacción, esta disposición no es tan buena como la precedente. Si los cilindros estuvieran también a 180º como las manivelas (cilindros opuestos) no se produciría este defecto.



$$F'c \cdot C = Fc \cdot B$$

$$F'c = Fc \cdot \frac{B}{C}$$

Equilibrado:

1) *Fuerzas centrífugas:* Están equilibradas, ya que son iguales y opuestas: $\Sigma Fc = 0$.
2) *Fuerzas alternas de primer orden:* Resultan también equilibradas: $\Sigma F'a = 0$.
3) *Par generado por las fuerzas centrífugas:* Las dos fuerzas centrífugas dan origen a un par de fuerzas de momento $Mc = Fc \cdot B$. Se puede obtener el equilibrado perfecto con dos contrapesos, siendo la fuerza a desarrollar por cada contrapeso $F'c = Fc \cdot \dfrac{B}{C}$
4) *Par generado por las fuerzas alternas de primer orden:* $M'a = F'a \cdot B$.
   Este par da origen a vibraciones en el plano longitudinal del motor. No pudiendo ser completamente equilibrado por razones análogas a las expuestas para el monocilíndrico. Se trata de reducir los efectos nocivos aumentando las masas de los contrapesos precedentes. La fuerza centrífuga de la masa que se añade, debe ser: $F = \left(\dfrac{1}{2} a \dfrac{2}{3}\right) \cdot F'a \cdot \dfrac{B}{C}$
5) *Fuerzas alternas de segundo orden:* Son iguales para los dos cilindros; en efecto, para una posición θ cualquiera, de la manivela del cilindro, tenemos:

   Cilindro 1: $\alpha = \theta$; $\cos 2\alpha = \cos 2\theta$; $Fa_1'' = m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \lambda \cdot \cos 2\theta$;

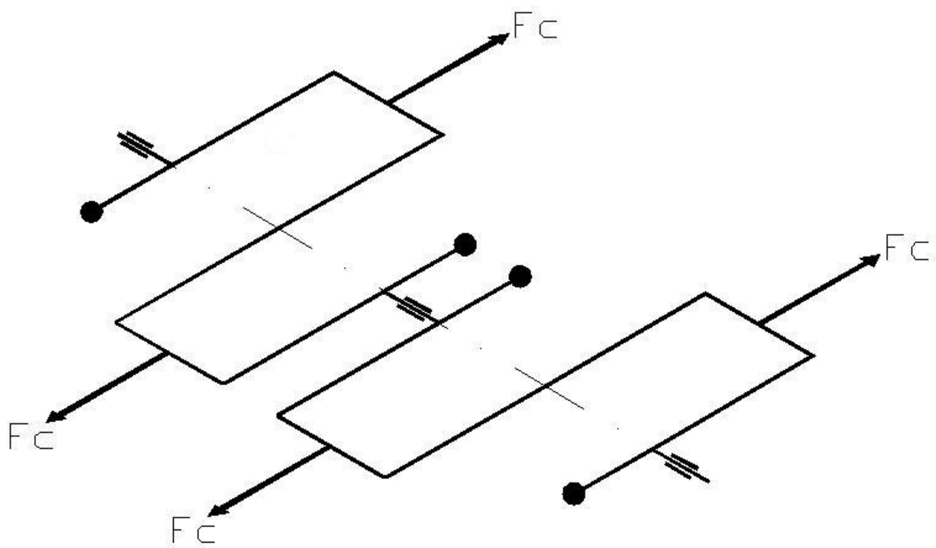
   Cilindro 2: $\alpha = 180º + \theta$; $\cos 2\alpha = \cos 2(180º + \theta) = \cos(360º + 2\theta) = \cos 2\theta$;

   $Fa_2'' = m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \lambda \cdot \cos 2\theta$; $\Sigma Fa'' = Fa_1'' + Fa_2'' = 2 \cdot m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \lambda \cdot \cos 2\theta$;

   En conclusión, vemos que, cualquiera que sea la posición del eje, la fuerza alterna resultante vale dos veces la de un cilindro.

6) *Par producido por la fuerza alterna del segundo orden:* Las dos fuerzas están dirigidas en el mismo sentido y, por tanto, no originan par.

5.15.3. Motor de cuatro cilindros en línea y cuatro tiempos.



$\alpha = \dfrac{720º}{N} = \dfrac{720º}{4} = 180º$; El orden de encendido normal es 1-3-4-2.

Equilibrado:

1) *Fuerzas centrífugas:* Están equilibradas, ya que son iguales y opuestas: $\Sigma Fc = 0$.
2) *Fuerzas alternas de primer orden:* Están equilibradas, porque también lo están las fuerzas centrífugas: $\Sigma F'a = 0$.

3) *Par generado por las fuerzas centrífugas:* Las manivelas están dispuestas simétricamente. Por lo que el par originado por las fuerzas centrífugas de los cilindros 1 y 2, equilibran el correspondiente a los cilindros 3 y 4. $\Sigma Mc = 0$.
   No obstante, para evitar sobrecargas en los cojinetes producidas por las fuerzas aplicadas en cada una de las muñequillas, se procede, a menudo, a equilibrarlas separadamente con contrapesos.
4) *Par generado por las fuerzas alternas de primer orden:* Están equilibradas por estarlo también los pares originados por las fuerzas centrífugas. $\Sigma Ma' = 0$.
5) *Fuerzas alternas de segundo orden:* Para una posición θ cualquiera de la manivela 1, tenemos:

   Cilindro 1: $\alpha = \theta$; $\cos 2\alpha = \cos 2\theta$; $Fa_1'' = m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \lambda \cdot \cos 2\theta$;

   Cilindro 2: $\alpha = 180^\circ + \theta$; $\cos 2\alpha = \cos 2(180^\circ + \theta) = \cos(360^\circ + 2\theta) = \cos 2\theta$;

   $Fa_2'' = m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \lambda \cdot \cos 2\theta$;

   Cilindro 3: $\alpha = 180^\circ + \theta$; $\cos 2\alpha = \cos 2(180^\circ + \theta) = \cos(360^\circ + 2\theta) = \cos 2\theta$;

   $Fa_3'' = m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \lambda \cdot \cos 2\theta$;

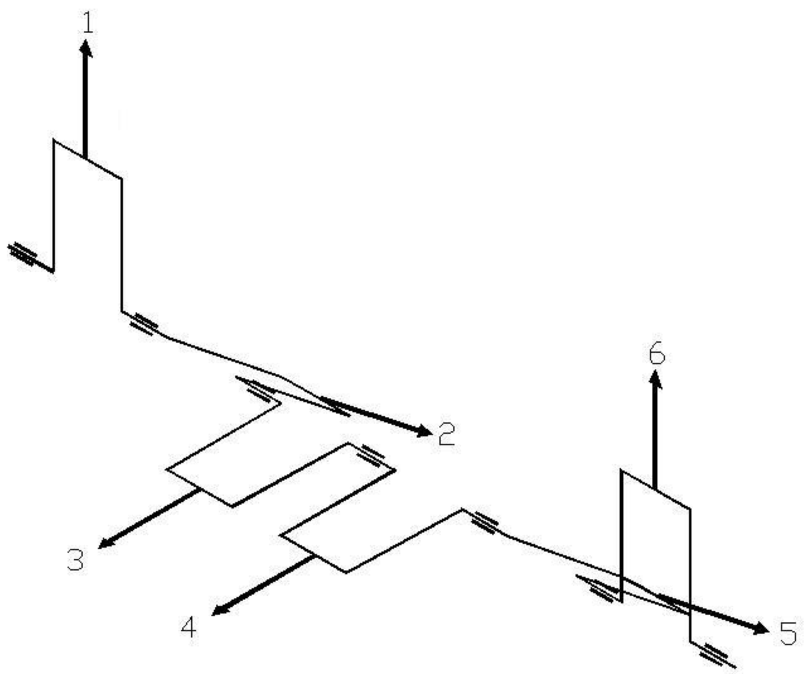
   Cilindro 4: $\alpha = 360^\circ + \theta$; $\cos 2\alpha = \cos 2(360^\circ + \theta) = \cos(720^\circ + 2\theta) = \cos 2\theta$;

   $Fa_4'' = m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \lambda \cdot \cos 2\theta$;

   La resultante vale, por tanto: $\Sigma Fa'' = 4 \cdot m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \lambda \cdot \cos 2\theta$;

   Resulta, por consiguiente, que en cualquier posición, la fuerza alterna resultante de segundo orden es igual a la de un cilindro, multiplicada por el número de cilindros. $\Sigma Fa'' = 4 \cdot Fa''$. Referida en particular al punto muerto, dicha resultante vale: $4 \cdot m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \lambda$, ya que $\cos 0^\circ = 1$ y $\cos 180^\circ = -1$.
6) *Par originado por las fuerzas alternas de segundo orden:* Las cuatro fuerzas están todas dirigidas en el mismo sentido, razón por la cual no originan par alguno.

5.15.4. Motor de seis cilindros en línea y cuatro tiempos.



$\alpha = \frac{720^\circ}{N} = \frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$; El orden de encendido normal es 1-5-3-6-2-4.

Equilibrado:

1) *Fuerzas centrífugas:* Constituyen tres vectores iguales, dispuestos a 120º entre sí; por ello están en equilibrio: $\Sigma Fc = 0$.
2) *Fuerzas alternas de primer orden:* Están, por tanto, equilibradas: $\Sigma F'a = 0$.
3) *Par debido a las fuerzas centrífugas:* Están equilibradas porque el eje admite un plano de simetría perpendicular al eje: $\Sigma Mc = 0$.
4) *Par generado por las fuerzas alternas de primer orden:* También están equilibradas. $\Sigma Ma' = 0$.
5) *Fuerzas alternas de segundo orden:* Para una posición θ cualquiera de la manivela 1, tenemos:

   Cilindro 1 y 6: $\alpha = \theta$; $\cos 2\alpha = \cos 2\theta$; $Fa_{1-6}{}'' = 2 \cdot m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \lambda \cdot \cos 2\theta$;

   Cilindro 2 y 5: $\alpha = 120^{\circ} + \theta$; $\cos 2\alpha = \cos 2(120^{\circ} + \theta) = \cos(240^{\circ} + 2\theta)$;

   como, $\cos(\alpha + \beta) = (\cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta)$;

   $Fa_{2-5}{}'' = 2 \cdot m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \lambda \cdot (-0,5 \cdot \cos 2\theta + 0,866 \cdot sen 2\theta)$;

   Cilindro 3 y 4: $\alpha = 240^{\circ} + \theta$; $\cos 2\alpha = \cos 2(240^{\circ} + \theta) = \cos(480^{\circ} + 2\theta)$;

   $Fa_{3-4}{}'' = 2 \cdot m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \lambda \cdot (-0,5 \cdot \cos 2\theta - 0,866 \cdot sen 2\theta)$;

   La resultante vale, por tanto: $\Sigma Fa'' = 4 \cdot m_a \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \lambda \cdot \cos 2\theta$;

   de donde la resultantes es: $\Sigma Fa'' = Fa_{1-6}{}'' + Fa_{2-5}{}'' + Fa_{3-4}{}'' = 0$

   Resulta que en cualquier posición las fuerzas de inercia de segundo orden están equilibradas.
6) *Par originado por las fuerzas alternas de segundo orden:* Teniendo en cuenta que las fuerzas resultan simétricamente dispuestas respecto a un plano normal al eje de rotación, el par resulta equilibrado: $\Sigma Ma'' = 0$.

   El motor de seis cilindros es uno de los más equilibrados; en efecto, continuando el análisis, se encuentra que las fuerzas alternas están equilibradas hasta el quinto orden inclusive.